SEGUNDO PARCIAL FEBRERO 2011 CÁLCULO NUMÉRICO SOLUCIONES

1er Problema

Dada la ecuación:

$$\cos x - x = 0$$

Se pide:

a) Demostrar mediante una representación gráfica esquemática que la ecuación tiene una sola raíz real

b) Demostrar analíticamente que el intervalo $[0,1]$ contiene la raíz única.

c) Demostrar que con el método iterativo:

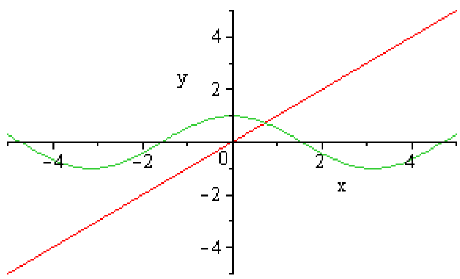
$$x_{k+1} = \frac{x_k + \cos x_k}{2}; \quad k = 0,1,2,...$$

se puede calcular la raíz partiendo de cualquier valor inicial $x_0 \in [0,1]$, es decir, el método es convergente en dicho intervalo.

d) Calcular el número mínimo de iteraciones que hay que realizar para obtener la solución con cinco decimales exactos.

e) Demostrar que utilizando el método iterativo convergente $x_{k+1} = \cos x_k \;; k = 0,1,2,...$ con $x_0 \in [0,1]$, para obtener la misma precisión, el número mínimo de iteraciones es mayor.

a) La ecuación $\cos(x) - x = 0$ se puede poner como $\cos(x) = x$ y las raíces de la ecuación dada son las abscisas de los puntos de corte de la curva $y_1 = \cos(x)$ y de la recta $y_2 = x$



Demostrado gráficamente que la ecuación tiene sólo una raíz real, vamos a demostrar analíticamente que está en el intervalo $[0,1]$ y es simple:

- $f(x) = x - \cos(x)$ es una función continua $\forall x \in [0,1]$
- $f(0)f(1) < 0$

Por el teorema de Bolzano la raíz está en el intervalo $[0,1]$

- $f'(x) = 1 + sen(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Por el Teorema de Rolle la raíz es única en $[0,1]$

b) El método iterativo $x_{k+1} = \dfrac{x_k + \cos(x_k)}{2}$; $k = 0,1,2...$ implica la ecuación de punto fijo ($x = g(x)$) $x = \dfrac{x + \cos(x)}{2}$ equivalente a la dada, con $g(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{2}$

<u>Teorema de convergencia global en un intervalo</u> $[a,b]$(Teorema del punto fijo)

Si $g(x) \in C^1[a,b]$ y cumple:

- $|g'(x)| \le L < 1; \quad \forall x \in [a,b]$
- $g([a,b]) \subset [a,b]$,es decir, $g(x) \in [a,b]; \quad \forall x \in [a,b]$

Existe un único $s \in [a,b]$ tal que $s = g(s)$ y se halla como límite de la sucesión $x_{k+1} = g(x_k)$ con $x_0 \in [a,b]$ arbitrario.

En nuestro caso:

- $g(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{2}$ y $g'(x) = \dfrac{1 - sen(x)}{2}$ son ambas continuas en $[0,1]$

  $|g'(x)| = \left| \dfrac{1 - sen(x)}{2} \right| = \dfrac{1 - sen(x)}{2}; \ \forall x \in [0,1]$

  $|g'(x)| \le \dfrac{1}{2} = 0.5 < 1; \ \forall x \in [0,1]$. La función $g(x)$ cumple la 1^a condición del teorema con constante de contractividad $L = 0.5 < 1$
- $g(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{2}$ es positiva y creciente en $[0,1]$ (tiene un valor máximo en $x = 1$) y un valor mínimo en $x = 0$)

  $g(0) = 0,5$ y $g(1) = 0.770151$, cumpliéndose que

  $g([0,1]) = [0.5, 0.770151] \subset [0,1]$.La función $g(x)$ verifica también la 2ª condición del teorema y el método $x_{k+1} = \dfrac{x_k + \cos(x_k)}{2}$; $k = 0,1,2...$ converge a la solución de la ecuación $\cos(x) - x = 0$ para cualquier valor inicial $x_0 \in [0,1]$

c) Utilizando la cota del error $|e_k| \le L^k |b - a| \le 0.5 \cdot 10^{-5}$ con $L = 0,5$ y $|b - a| = 1$

$$k \ge \frac{l_n(0,5 \ 10^{-5})}{l_n(0,5)} = 17,6096$$

El número mínimo de iteraciones es 18

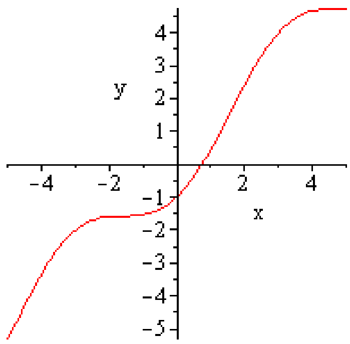
d) En este método $g(x)=\cos(x) \quad y \quad g'(x)=-sen(x)$ ambas funciones continuas en $[0,1]$

$|g'(x)|=sen(x) \quad \forall x\in[0,1]$, y su máximo valor se alcanza para $x=1$, por tanto

$|g'(x)|=sen(x)\leq sen(1)=0{,}84147<1 \quad \forall x\in[0,1]$

Ahora la constante de contractilidad es $L=0{,}84147$, utilizando la misma cota de error se obtiene $k\geq 70{,}69$ y el número mínimo de iteraciones es 71

<u>Nota</u>: Aunque no es necesaria, la gráfica de $f(x)$ es:



<u>2º Problema</u>

Se considera el sistema lineal Ax=b, dado por

$$\begin{pmatrix}4 & a & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

a) (5 puntos) Calcular la factorización LU de la matriz A del sistema anterior, suponiendo que los elementos diagonales de la matriz L son unos y $a\neq 16$. Aplicar dicha factorización al cálculo del determinante de A.

b) (5 puntos) Escribir las ecuaciones que implementan el método de Jacobi aplicado a la resolución del sistema lineal dado con $a=1$. Calcular una solución aproximada aplicando dicho método y tomando como punto inicial $\left(x_1^0, x_2^0, x_2^0\right)^T=(0,0,0)^T$ (calcular dos iteraciones).

SOLUCIÓN

a) Se considera la factorización LU:

$$\begin{pmatrix} 4 & a & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{31} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Por ser A una matriz tridiagonal, también lo son las matrices L y U; por tanto, $l_{31} = u_{13} = 0$. Efectuando las operaciones convenientemente, se concluye:

$$u_{11} = 4, \quad u_{12} = a,$$
$$l_{21} = \frac{1}{4}, \quad u_{22} = \frac{16-a}{4},$$
$$l_{32} = \frac{4}{16-a}, \quad u_{33} = \frac{4(15-a)}{16-a}.$$

b) Aplicamos el método iterativo de Jacobi para la resolución del sistema dado (a=1):

$$\begin{aligned} 4x_1^{k+1} &= -x_2^k + 1 \\ 4x_2^{k+1} &= -x_1^k - x_3^k + 1 \\ 4x_3^{k+1} &= -x_2^k + 1 \end{aligned}$$

Resultando:

$$\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)^T = (0, 0, 0)^T, \left(x_1^1, x_2^1, x_3^1\right)^T = (0.25, 0.25, 0.25)^T, \quad \left(x_1^2, x_2^2, x_3^2\right)^T = \frac{1}{4}(0.75, 0.5, 0.75)^T.$$

3er Problema

Se considera el problema diferencial de condición inicial:

$$y' = f(t, y); y(t_0) = y_0$$

para cuya integración se busca una fórmula del tipo:

$$y_{i+1} = y_i + h(\alpha_1 y'_{i+1} + \alpha_0 y'_i) + h^2(\beta_1 y''_{i+1} + \beta_0 y''_i)$$

Determinar los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ y β_1 para que el grado de validez de la fórmula sea el mayor posible. ¿Cuál es el error por paso?